第 39 卷 第 5 期 应 用 力 学 学 报 Vol. 39 No. 5
2022 年 10 月 Chinese Journal of Applied Mechanics Oct. 2022

文章编号:1000-4939(2022)05-0915-07

圆柱体振子纵径耦合振动频率的理论计算

佘银柱[1],王时英[2],秦慧斌[3],吕明[2]

(1. 太原工业学院机械工程系,030008 太原;2. 太原理工大学机械工程学院,030024 太原;
3. 中北大学先进制造技术山西省重点实验室,030051 太原)

摘 要:振子的实际振动都是不同振动模式之间的耦合振动,薄板径向振动理论、变幅杆一维设计理论等都是三维弹性理论的简化形式,都有相应的适用范围,否则将产生大的计算误差。通过设定纵径耦合系数,由弹性动力学理论推导出了圆柱体振子纵径耦合振动的频率方程,并通过与有限元分析结果及实验测量值的比较,证明了该方法具有非常高的计算精度。在圆柱体振子的纵径耦合振动中,其长径比(或厚径比)越大,振子的纵向振动越强,反之振子的径向振动越强。

关键词:圆柱体振子;纵径耦合振动;频率方程

中图分类号:TH112.41 **文献标志码**:A **DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2022.05.013

Theoretical calculation of the resonance frequency of the cylindrical vibrator in longitudinal-radial coupled vibration

SHE Yingzhu[1], WANG Shiying[2], QIN Huibin[3], LÜ Ming[2]

(1. Department of Mechanical Engineering of Taiyuan Institute of Technology, 030008 Taiyuan, China;
2. College of Mechanical Engineering, Taiyuan University of Technology, 030024 Taiyuan, China;
3. Shanxi Key Laboratory of Advanced Manufacturing Technology, North University of China, 030051 Taiyuan, China)

Abstract: The actual vibration of the vibrator is the coupling vibration between different vibration modes. The radial vibration theory of the thin plate and the one-dimensional design theory of the horn are all simplified forms of the three-dimensional elastic theory, and they all have their scope of application, larger calculation errors will result if the scope is exceeded. By setting the longitudinal-radial coupling coefficient, the frequency equation of the longitudinal-radial coupled vibration of the cylindrical and the circular plate vibrators is derived from the elastic dynamics theory. The comparison with the finite element analysis results and measured values proves that the method has very high calculation accuracy. In the longitudinal-radial coupled vibration of a cylindrical vibrator, the greater its length-diameter ratio (or thickness-diameter ratio) is, the stronger the longitudinal vibration of the vibrator will be; the smaller its length-diameter ratio is, the stronger the radial vibration of the vibrator is.

Keywords: cylindrical vibrator; longitudinal-radial coupled vibration; frequency equation

收稿日期:2021-01-24 **修回日期**:2022-07-25
基金项目:山西省自然科学基金资助项目(No. 201801D121176);山西省高校科技成果转化培育项目(No. 2020CG033)
通信作者:佘银柱,副教授。E-mail: email.zhu@163.com
引用格式:佘银柱,王时英,秦慧斌,等. 圆柱体振子纵径耦合振动频率的理论计算[J]. 应用力学学报,2022,39(5):915-921.
SHE Yingzhu, WANG Shiying, QIN Huibin, at al. Theoretical calculation of the resonance frequency of the cylindrical vibrator in longitudinal-radial coupled vibration[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2022, 39(5):915-921.

在功率超声振动系统中,圆柱体振子是常见的重要元件之一。按其轴向尺寸的不同,其形状有圆板形、圆柱杆形等,如超声珩磨中的振动圆盘[1],超声珩齿中的齿轮[2-3]圆柱形变幅杆等。变幅杆的主要作用是放大机械振动的振幅,或在换能器与负载之间进行阻抗匹配,使超声能量更有效的从换能器向负载传输[4]。变幅杆最主要的振动模式是纵向振动,传统的变幅杆设计都是依据一维弹性理论进行的,忽略变幅杆的横向振动,这在变幅杆的径向尺寸较小时是适用的,不会引起较大的误差。随着大功率超声技术的发展,如超声清洗、超声液体处理等,要求振动系统中变幅杆具有更大的功率和更大的辐射面[5],而随着径向尺寸的增大,变幅杆由于泊松效应的影响,径向振动也越来越大,一维弹性理论的计算误差也越来越大。

圆板形振子的主要振动模式有弯曲振动和径向振动。对于圆板的径向振动,当其厚径比很小时,可以不考虑其厚度的影响,用薄板理论计算其振动特性,方法简便且有较高的准确性。当圆板形振子的厚径比逐渐增大时,薄板理论的“直法线”假设不能成立,剪应力τ_{xz}、法应力Q_z、相对弯曲应力越显重要而不能忽略不计,薄板理论的计算结果将产生很大的误差。中厚板理论抛弃了经典理论的“直法线”假设,考虑了剪切变形的影响,因此比经典理论更精确,如应用 mindlin 中厚板理论,当圆板形振子的厚径比小于$\frac{1}{2}\sim\frac{1}{2.5}$时即可获得较精确的理论解[6]。

从本质上说,传统变幅杆设计理论、经典薄板理论、中厚板理论等都是三维弹性理论在某些特殊尺寸、形状物体范围内的简化。传统变幅杆设计理论、经典薄板理论均属于一维弹性理论,而中厚板理论是一种介于一维弹性理论和三维弹性理论之间的简化理论。如果当振子的形状介于圆板与细长圆柱杆之间时,尤其当振子的径向尺寸与轴向尺寸相近时,由于泊松效应,振子会产生很强的纵径耦合振动,应用传统变幅杆设计理论或中厚板理论求解振动特性都将产生较大的误差。这种情况一般需要用三维弹性理论才能获得高精度解析解,而三维弹性理论计算难度大,如 Reddy 提出的三阶剪切理论在计算过程中将出现六阶微分方程[7],因此有学者提出了在一维理论的基础上用能量法对计算结果进行修正[8-9],计算精度有一定提高,但不够理想。日本学者森荣司教授提出了表观弹性法处理实心振子的耦合振动,国内有学者用此方法对圆柱体、矩形六面体等的振动进行分析[10-11],计算精度得到提高。但表观弹性法仍有它的局限性,通过与有限元法计算结果的比较,说明只有在长度-直径比大于 1 时吻合较好,随着长度-直径比的减小,两者的偏差增大[12]。而有限元模态分析虽然结果更准确,但在工程设计时很难快速找到所需要的结构参数,更适合在理论计算的基础上对设计参数进行微调或用作验证工具。

通过假设圆柱体振子轴向与径向、切向应变之间的耦合关系,基于弹性动力学理论推导出了振子纵径耦合振动的频率方程,其适用范围涵盖了从细长圆柱体变幅杆到薄圆板不同长径比(或厚径比)的振子,方法简单,计算量小。将理论计算结果与 ANSYS 模态分析及相关文献实验结果进行比较,验证了该理论计算有很高的准确性。

1 圆柱体振子耦合振动分析

1.1 振子纵径耦合振动的频率方程

设一圆柱体振子,其半径为 a,轴向长度为 l,根据胡克定律,可导出应力与应变之间有如下关系。

$$\sigma_r=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_r+\mu(\varepsilon_\theta+\varepsilon_z)] \quad (1)$$

$$\sigma_\theta=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_\theta+\mu(\varepsilon_r+\varepsilon_z)] \quad (2)$$

$$\sigma_z=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_z+\mu(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta)] \quad (3)$$

式中:σ_r、σ_θ、σ_z分别为振子径向、切向、纵向的应力;ε_r、ε_θ、ε_z分别为振子径向、切向、纵向的应变;E、μ 分别为振子的弹性模量和泊松比。若振子只有轴对称弹性变形,即只有轴对称的径向振动和纵向振动时,有$\sigma_{r\theta}=\sigma_{\theta z}=\sigma_{zr}=0$,$\varepsilon_{r\theta}=\varepsilon_{\theta z}=\varepsilon_{zr}=0$,则振子径向振动的运动方程为

$$\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r} \quad (4)$$

振子纵向振动的运动方程为

$$\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} \quad (5)$$

轴对称弹性变形时各应变分量可表示为

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u_r}{\partial r},\varepsilon_\theta=\frac{u_r}{r},\varepsilon_z=\frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (6)$$

式中:u_r、u_z分别为振子的径向和纵向位移;ρ 为振子

密度；t 为时间。

1.2 振子的径向振动分析

若振子为径向和纵向的复合振动，圆柱体振子的纵向、径向及切向 3 个主应变不独立，假设在振动模式确定的情况下主应变之间存在某种确定的关系，并用下式来表达。

$$n=\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_r+\varepsilon_\theta} \tag{7}$$

在确定的振动模式下，式中 n 为常数，称为振子的纵径耦合系数。由此可得式(4)中

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_r+\mu(\varepsilon_\theta+n\,\varepsilon_r+n\,\varepsilon_\theta)]'$$
$$=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu+n\mu)\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+(\mu+n\mu)\left(\frac{\partial u_r}{r\partial r}-\frac{u_r}{r^2}\right)\right] \tag{8}$$

则(4)式中

$$\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}(\varepsilon_r-\mu\,\varepsilon_r+\mu\,\varepsilon_\theta+\mu\,\varepsilon_z-\varepsilon_\theta+\mu\,\varepsilon_\theta-\mu\,\varepsilon_r-\mu\,\varepsilon_z)\frac{1}{r} \tag{9}$$

将式(8)~(9)代入式(4)，可得

$$\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}=\frac{E(1-\mu+n\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{\partial u_r}{r\partial r}+\frac{u_r}{r^2}\right] \tag{10}$$

设 $E_r=\dfrac{E(1-\mu+n\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}$，$E_r$ 可称为振子径向等效弹性模量。振子做简谐振动时，径向位移分量为周期函数，应用分离变量法可设 u_r 的形式为：$u_r=U_r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，式中 U_r 为分离出时间因子后的位移分布函数，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 为时间因子，ω 为振子固有圆频率，i 为虚数单位。

将 u_r、E_r 代入式(10)后，化简可得

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2 u_{r0}}{\mathrm{d}r^2}+r\frac{\mathrm{d}u_{r0}}{\mathrm{d}r}+(k_r^2r^2-1)u_{r0}=0 \tag{11}$$

式中 k_r 为径向振动等效圆波数，$k_r=\omega\sqrt{\dfrac{\rho_r}{E_r}}$。式(11)为一阶贝塞尔方程，通解为

$$u_r=U_r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=[A_rJ_1(k_rr)+B_rY_1(k_rr)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{12}$$

式中 A_r、B_r 为待定常数，由振子的边界条件确定；J_1 为一阶第一类贝塞尔函数；Y_1 为一阶第二类贝塞尔函数。如果不考虑时间因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，则式(11)的通解为

$$u_r=A_rJ_1(k_rr)+B_rY_1(k_rr) \tag{13}$$

当 $r\to 0$ 时，$Y_1(k_rr)\to\infty$，而对于实心圆柱体振子，位移 u_r 不可能趋于无穷，因此 $B_r\equiv 0$，则实心振子的径向位移函数为

$$u_r=A_rJ_1(k_rr) \tag{14}$$

当圆柱体振子为径向自由振动时，其外表面不受力，因此有边界条件

$$\sigma_r\Big|_{r=a}=0 \tag{15}$$

即

$$\sigma_r=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_r+\mu(\varepsilon_\theta+\varepsilon_z)]=0 \tag{16}$$

由式(6)、位移函数式(13)、边界条件式(15)，可得振子径向振动的频率方程为

$$(1-\mu+n\mu)k_ra\,J_0(k_ra)-(1-2\mu)J_1(k_ra)=0 \tag{17}$$

式中：J_0 为零阶第一类贝塞尔函数；J_1 为一阶第一类贝塞尔函数。该频率方程是一个关于振子材料、尺寸、频率的超越方程，一般需要用数值法求其数值解。若耦合系数 n 越小，则表示振子的径向振动越强而纵向振动越弱，反之 n 越大则振子的纵向振动越强而径向振动越弱。可以看出当引入振动耦合系数后，振子的径向和纵向振动不再是互不相关的一维振动，而是互相影响的。

1.3 振子的纵向振动分析

引入耦合系数后，由式(3)可得

$$\sigma_z=\frac{E\left(1-\mu+\dfrac{\mu}{n}\right)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\varepsilon_z \tag{18}$$

设 $E_z=\dfrac{E\left(1-\mu+\dfrac{\mu}{n}\right)}{(1+\mu)(1-2\mu)}$，则上式可表示为

$$\sigma_z=E_z\varepsilon_z \tag{19}$$

式中 E_z 可称为振子纵向等效弹性模量。由式(5)、式(6)及式(19)可得振子纵向振动的频率方程为

$$\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}=E_z\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \tag{20}$$

同理，当振子做简谐振动时，可用分离变量法设 u_z 的形式为 $u_z=U_z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，并代入上式后可得

$$\frac{\mathrm{d}^2U_z}{\mathrm{d}z^2}+k_zU_z=0 \tag{21}$$

式中 k_z 称为纵向振动等效圆波数，$k_z=\omega\sqrt{\dfrac{\rho_r}{E_z}}$。若不考虑时间因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，式(21)的通解为

$$u_z=A_z\sin(k_zz)+B_z\cos(k_zz) \tag{22}$$

式中A_z、B_z为待定常数，由振子的边界条件确定。上式中耦合系数 n 越大，则表示圆柱体的纵向振动越强而径向振动越弱，反之 n 越小则圆柱体的径向振动越强而纵向振动越弱。

当振子做自由振动时，其2个端面为自由端，因此有边界条件

$$\sigma_z\Big|_{z=0}=0,\quad \sigma_z\Big|_{z=h}=0 \tag{23}$$

即

$$\frac{\partial u_z}{\partial z}\Big|_{z=0}=0,\frac{\partial u_z}{\partial z}\Big|_{z=h}=0 \tag{24}$$

由式(6)、位移函数式(22)、边界条件式(24)，可得振子纵向振动的频率方程为 $\sin(k_z l)=0$，即

$$k_z l=m\pi\ (m=1,2,3,\cdots) \tag{25}$$

式中 $m=i$ 时计算得到的是振子的 i 阶频率，$m=1$ 时为基频。式(25)与式(17)必须联合求解才能求得在纵径耦合振动的情况下振子的固有振动频率。需要注意的是在圆柱体振子的纵向或径向振动中，由耦合系数 n 的定义可知，n 的值不可能为零或者为无穷大，因此不存在圆柱体振子单纯的径向或单纯的纵向振动，纵径耦合振动是普遍存在的，只有耦合程度强弱的不同，或者说纵向、径向振动强度的不同，其耦合程度的强弱由耦合系数 n 表征。

2　与其他理论计算结果的比析

2.1　与薄板径向振动理论计算结果的比较

振子自由振动时，由式(25)知频率方程为$k_z l=m\pi$，则有

$$k_z^2=\frac{m^2\pi^2}{l^2} \tag{26}$$

由k_z的定义知

$$k_z^2=\frac{\omega^2}{c_z^2}=\frac{\omega^2\rho}{E_z}=\frac{\omega^2\rho(1+\mu)(1-2\mu)}{E\left(1-\mu+\dfrac{\mu}{n}\right)} \tag{27}$$

联合式(26)、(27)可确定耦合系数 n 的表达式为

$$n=\frac{E m\pi^2\mu}{\omega^2h^2\rho(1+\mu)(1-2\mu)-Em\pi^2(1-\mu)} \tag{28}$$

一钢质圆柱体振子，半径 $a=50$ mm，轴向长度 $l=10$ mm，密度 $\rho=7\ 810$ kg/m^3，弹性模量 $E=209$ GPa，泊松比 $\mu=0.29$。按薄板径向振动理论[13]计算得其一阶自由径向振动的频率为35 152 Hz。用数值法对频率方程式(17)求解，求解频率范围 $f=10\sim50$ kHz。设 $\Delta=(1-\mu+n\mu)K_r a\,J_0(K_r a)-(1-2\mu)J_1(K_r a)$，用Matlab计算 Δ 值随频率 f 的变化曲线，该曲线与 $\Delta=0$ 的交点即为方程的解。计算结果如图1所示，该圆柱体振子的一阶计算频率为35 073 Hz。

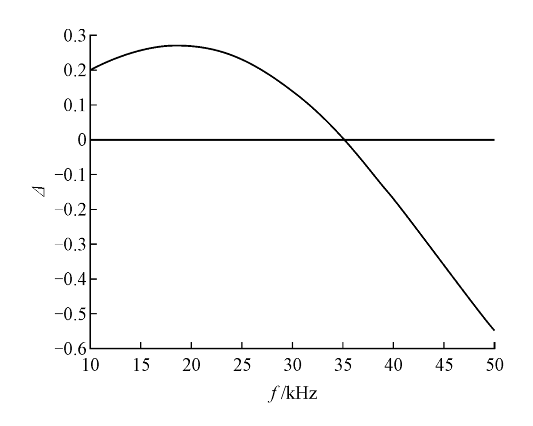


图1　计算值Δ随频率f的变化曲线

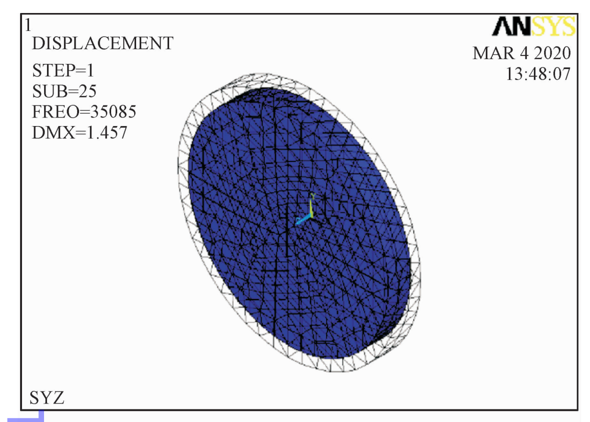
Fig. 1　Calculated value Δ versus vibration frequency f

用ANSYS对振子做模态分析，单元类型为SOLID 95，采用智能自由网格划分，结果如图2所示，振子在35 085 Hz时做明显径向振动。图2(a)为振子的变形图，图2(b)为振子的位移云图。通过比较可以看出，由耦合方程计算的频率与有限元分析结果更接近，薄板径向振动理论由于没有考虑泊松效应带来的影响，计算结果偏大，但在振子的厚径比很小时，与有限元分析结果相差极微小，误差可忽略。

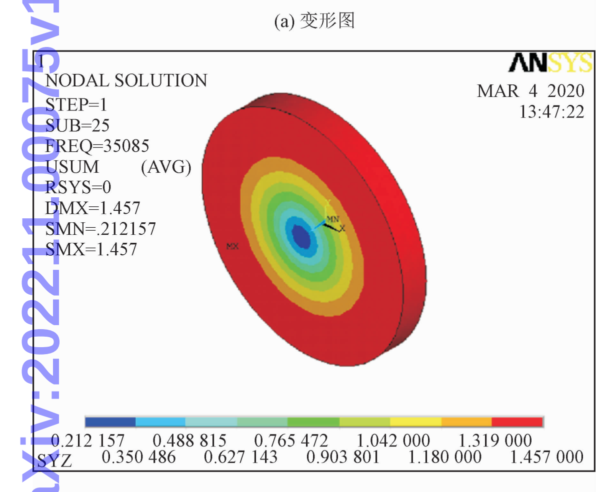
图3比较了ANSYS中振子节点沿径向和轴向的相对位移分布曲线，可看出振子节点既存在径向位移又存在轴向位移，说明振子在明显径向振动的同时仍存在轴向振动，处于纵、径向混合振动模式。节点径向最大位移位于圆柱体外表面，远大于轴向最大位移，说明振子径向振动明显而轴向振动较弱。

设振子的轴向长度变化范围为 $l=10\sim100$ mm，l 每增加10 mm，用耦合振动理论计算其一阶径向振动频率，并用有限元模态分析进行对比验证，分析结果如表1所示。表中f_1为本研究耦合理论的计算结果，f_A为ANSYS模态分析结果。可以看出，随着振子厚度的增大，耦合理论所得径向振动频率逐渐减小，与一维径向振动理论的计算值相差越来越大，而与有限元模态分析结果始终吻合很好，最大偏差出现在 $l=50$ mm，即长径比为0.5时，相对偏差只有0.7%。对不同长径比圆柱体振子做有限元模态分析，结果表明振子确实不存在单纯的径向或单纯的纵向振动模式，而是做纵径耦合的混合振动。振子

的长径比越小，径向振动越强，振子的长径比越大，则径向振动越弱而纵向振动越强。薄板理论因不考虑振子轴向长度的变化及纵径振动耦合，随着振子长径比的增大，与 ANSYS 分析结果相差越来越大。



(a) 变形图



(b) 位移云图

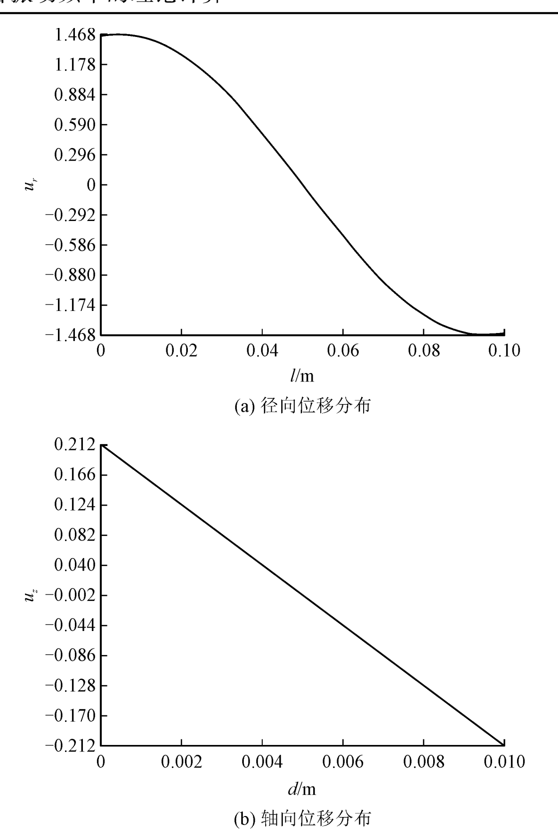
图 2　振子的 ANSYS 模态分析结果

Fig. 2　ANSYS modal analysis results of the vibrator

表 1　不同长度振子径向振动计算频率的比较

Tab. 1　Comparison of calculation frequency of radial vibration of vibrators with different length

振子长度 l/mm	振子径向振动频率/Hz		$\left\lvert\frac{f_A - f_1}{f_A}\right\rvert$/%
	f_1	f_A	
10	35 073	35 085	0.03
20	34 847	34 897	0.10
30	34 437	34 546	0.30
40	33 786	33 963	0.50
50	32 820	33 036	0.70
60	31 469	31 664	0.60
70	29 742	29 812	0.20
80	27 772	27 779	0.03
90	25 752	25 754	0.008
100	23 826	23 840	0.06



(a) 径向位移分布

(b) 轴向位移分布

图 3　振子节点的位移分布曲线

Fig. 3　Displacement distribution curve of the node of the vibrator

2.2　与一维变幅杆设计理论计算结果的比较

设一圆柱体振子，半径 $a = 50$ mm，取长度 l 变化范围为 $l = 50 \sim 200$ mm，用耦合理论计算不同长度振子的一阶纵向振动频率，并用 ANSYS 模态分析进行对比验证。分析结果如表 2 所示，其中 f_1 为本研究耦合理论的计算结果，f_2 为等截面变幅杆的设计理论[1]的计算结果，f_A 为 ANSYS 模态分析结果。可以看出随着圆柱杆长度的增大，其纵振频率持续降低，耦合理论计算结果与有限元计算结果始终相差极小，而一维理论计算值与有限元分析结果相差明显，由于没有考虑泊松效应带来的影响，计算结果较有限元分析结果偏大。圆柱体振子的长径比越大，一维理论计算结果与有限元分析结果的偏差越小，反之则偏差越大，其原因在于圆柱体振子实际是做纵径耦合的混合振动，振子的长径比越大，纵向振动越明显，振子的长径比越小，纵向振动越弱。因此长径比是影响圆柱体振子振动模式的主要参数而不是径向尺寸。

2.3　与表观弹性法计算结果的比较

文献[10]中钢制圆柱体振子，长 62.4 mm，半径

26 mm，$E = 2.16\times1\,011$ N/m^2，$\rho = 7\,800$ kg/m^3，$\mu = 0.34$，表观弹性法计算频率为 40 000 kHz，有限元计算频率 40 282 kHz，频率误差为 0.705%。耦合理论计算频率为 40 195 kHz，与有限元结果相比频率误差为 0.216%，吻合程度高于表观弹性法。

表 2　不同长度振子纵向振动计算频率的比较

Tab. 2　Comparison of calculation frequency of longitudinal vibration of the vibrator

振子长度 l/mm	振子纵向振动频率/Hz			$\lvert \frac{f_A - f_1}{f_A} \rvert$/%	$\lvert \frac{f_A - f_2}{f_A} \rvert$/%
	f_1	f_2	f_A		
50	32 820	51 756	33 036	0.7	56.6
60	31 469	43 130	31 664	0.6	36.1
70	29 742	36 969	29 812	0.2	23.9
80	27 772	32 348	27 779	0.03	16.4
90	25 752	28 753	25 754	0.008	11.6
100	23 826	25 878	23 840	0.06	8.5
110	22 067	23 526	22 086	0.09	6.5
120	20 493	21 565	20 512	0.09	5.1
130	19 094	19 906	19 111	0.09	4.1
140	17 854	18 485	17 868	0.08	3.4
150	16 753	17 252	16 763	0.06	2.9
200	12 743	12 939	12 750	0.05	1.5

表 3 比较了本研究耦合理论计算值与文献[11]中表观弹性法的计算值及实测值。其中：f_1 为本研究耦合理论的计算结果；f_2 为表观弹性法的计算结果；f_m 为实验测量值。振子的尺寸及物理参数见文献[11]。从表中可以看出耦合理论计算结果普遍与实测频率更加吻合。

表 3　圆柱体振子计算频率与实测频率的比较

Tab. 3　Comparison of calculated frequency and measured frequency of cylindrical vibrator

振子	f_{1z}	f_{1r}	f_{2z}	f_{2r}	f_{mz}	f_{mr}
1	51 432.5	20 276.7	50 641.2	20 196.7	52 258.2	20 399.4
2	39 434.0	20 399.2	39 986.9	20 223.4	41 557.6	20 427.8
3	20 341.4	44 939.0	20 164.4	43 607.4	20 529.1	45 061.9
4	45 392.4	168 664.5	45 139.9	153 729.6	45 109.0	165 093.0
5	20 034.5	115 278.0	20 009.1	114 791.2	19 896.7	119 549.0

3　结　论

振子的实际振动都是不同振动模式之间的耦合振动，单纯的一种振动模式（如纯径向振动、纯纵向振动等）是不存在的，但在求解振子的振动特性时，由于三维弹性理论的复杂性，根据具体应用情况各种简化理论被提出来，如变幅杆一维设计理论、薄板径向振动理论等，各种简化理论都有相应的适用范围，使得应用受到限制。

通过设定圆柱体振子纵径应变耦合系数，由弹性动力学理论推导出圆柱体振子纵径耦合振动的频率方程，求得振子纵向及径向固有振动频率，其适用范围涵盖了从细长圆柱体变幅杆到薄圆板不同长径比（或厚径比）的情况。研究表明圆柱体振子的长径比（或厚径比）是影响其振动模式的主要参数而不是径向尺寸，在纵径耦合振动中，当振子的长径比越大，振子的纵向振动越强，反之，振子的径向振动越强。

纵径耦合振动的频率方程虽然也是一种简化理论，但通过与有限元分析结果及其他文献实验测量的频率比较，证明了其具有较高的计算精度，对不同尺寸、不同长径比振子纵、径振动固有频率的理论计算值始终与有限元分析结果吻合度极高。计算精度高和计算精度不受振子长径比（或厚径比）的影响是耦合振动理论明显优于其他简化理论的地方。该方法也对其他大直径的带孔圆柱体振子或变截面变幅杆的设计提供了一种新的思路。

参考文献：

[1]　王爱玲，祝锡晶，吴秀玲. 功率超声振动加工技术[M]. 北京：国防工业出版社，2007.

[2]　佘银柱，吕明，王时英. 非谐振单元变幅器的设计及其动力学研究[J]. 机械工程学报，2012，48(7)：49-55.
SHE Yinzhu，LÜ Ming，WANG Shiying. Design of transformer non-resonance structure and its dynamic study[J]. Journal of mechanical engineering，2012，48(7)：49-55(in Chinese).

[3]　吕明，佘银柱，秦慧斌，等. 超声珩齿振动系统的设计方法及其动力学特性[J]. 振动与冲击，2013(2)：147-152.
LÜ Ming，SHE Yinzhu，QIN Huibin，et al. Design method for a vibration system of ultrasonic gear honing and its dynamic characteristics[J]. Journal of vibration and shock，2013(2)：147-152(in Chinese).

[4]　贺西平，胡时岳. 复合超声纵振型变幅杆的简化设计[J]. 兰州大学学报(自然科学版)，2002，38(5)：24-27.
HE Xiping，HU Shiyue. Simplified design methods for compound ultrasonic longitudinal vibrating horn[J]. Journal of Lanzhou University (natural science)，2002，38(5)：24-27(in Chinese).

[5]　田华，林书玉. 一种复合换能器振动系统的研究[J]. 声学技术，2014，33(4)：41-44.

TIAN Hua, LIN Shuyu. A kind of compound transducer vibration system[J]. Technical acoustics, 2014, 33(4): 41-44(in Chinese).
[6] 曹志远,杨昇田. 厚板动力学理论及其应用[M]. 北京:科学出版社,1983.
[7] REDDY J N. A Simple higher-order theoryfor laminated composite plates[J]. Journal of applied mechanics, 1984, 51(4): 745-752.
[8] 桑永杰,林书玉. 基于能量修正法进行大尺寸指数型超声变幅杆准确设计[J]. 应用声学, 2007, 26(4): 193-196.
SANG Yongjie, LIN Shuyu. Precise design of large dimension exponential ultrasonic amplitude transformer based on energy modification method[J]. Applied acoustics, 2007, 26(4): 193-196(in Chinese).
[9] 刘洋,郑建新,刘传绍. 大截面超声珩磨圆锥型变幅杆设计[J]. 机械设计, 2013, 30(9): 62-65.
LIU Yang, ZHENG Jianxin, LIU Chuanshao. Design of conical horn with large section used in ultrasonic horning[J]. Journal of machine design, 2013, 30(9): 62-65(in Chinese).
[10] 周光平,梁明军,王家宣. 大尺寸超声振动体的研究[J]. 声学技术, 2004, 23(3): 183-188.
ZHOU Guangping, LIANG Mingjun, WANG Jiaxuan. Study on large sized ultrasonic vibrators[J]. Technical acoustics, 2004, 23(3): 183-188(in Chinese).
[11] 林书玉,张福成. 有限长各向同性圆柱体耦合振动的研究[J]. 声学与电子工程, 1993(1): 22-27.
LIN Shuyu, ZHANG Fucheng. Research on coupled vibration of finite length isotropic cylinder[J]. Acoustics and electronics engineering, 1993(1): 22-27(in Chinese).
[12] 俞宏沛. 复合振子藕合振动的工程计算[J]. 声学与电子工程, 1987(4): 27-37.
YU Hongpei. Engineering calculation of coupled vibration of compound vibrator[J]. Acoustics and electronics engineering, 1987(4): 27-37(in Chinese).
[13] 林书玉. 各向同性弹性薄圆盘的径向振动及其等效电路[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2001, 29(4): 31-35.
LIN Shuyu. The radial composite cylindrical piezoelectric ultrasonic transducer[J]. Journal of Shaanxi Normal University (natural science), 2001, 29(4): 31-35(in Chinese).

（编辑　李坤璐）